Inträdesförhör i matematik 30.5.2006

Anvisningar. Placera varje uppgift *på egen sida*. Ge klart utarbetade lösningar *inklusive mellanstadier*, renskriv lösningen vid behov. *Förkastade lösningar bör överstryckas.* Om icke-överstruckna lösningar föreligger för samma uppgift, så bedöms den sämsta av dessa.

A1. För vilka värden på parametern p har ekvationen $x^2 - 2px + p^2 - 4p + 16 = 0$ lösningen $x = 3$? Vilken är den andra lösningen till ekvationen då?

A2. Bestäm största och minsta värdet hos funktionen

$$f(x) = \sin^3 x - 3\sin x + \frac{28x}{11}$$

i intervallet $[0,7]$. (Ange svaren med tre decimalers noggrannhet.)

A3. Tre kamrater spelar ett spel, där man utan att titta lyfter vita och svarta kulor ur en påse. I påsen finns en vit och fyra svarta kulor. Spelaren, vars tur det är, lyfter en kula. Om kulan är vit, har spelaren vunnit; i annat fall läggs kulan tillbaka i påsen och turen går till nästa spelare. Spelarna lyfter i tur och ordning tills den vita kulan lyfts.

a) Med vilken sannolikhet avgörs spelet innan någon av spelarna har lyft två gånger?

b) Låt spelarna lyfta i ordningen A, B, C. Med hur stor sannolikhet vinner respektive spelare spelet?

(Ange svaren med tre decimalers noggrannhet.)

A4. För vilka värden på konstanten k, $k < 2$, gäller det att

$$\int_k^2 |2x+3|\,dx = \left|\int_k^2 (2x+3)dx\right| \quad ?$$

A5. Mätarlarvet Mats, som har stora svårigheter att bestämma sig, kryper fram och tillbaka längs en gren med längden 1. Varje gång han vänt och börjat krypa mot grenens ända kryper han 80 % av avståndet från vändpunkten till grenens ända och vänder sedan för att krypa tillbaka mot stammen. På väg mot stammen kryper Mats alltid 60 % av avståndet från vändpunkten till stammen och vänder sedan för att åter krypa mot grenens ända.

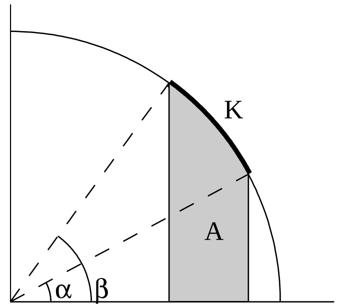
En gång, då Mats vände för att krypa mot grenens ända, var hans avstånd från stammen x_0. Då Mats sedan vände n:te gången för att åter krypa mot grenens ända, var hans avstånd från stammen x_n, $n > 0$.

a) Bestäm avståndet x_n som en funktion av avståndet x_{n-1}.

b) Bestäm avståndet x_n som en funktion av avståndet x_0.

c) Vad är x_0, då vändningen i viss riktning alltid sker i samma punkt? (Ange svaret med två decimalers noggrannhet.)

A6. Bågen K av enhetscirkeln med mittpunkten i origo befinner sig i första kvadranten i xy-planet. Linjesegmenten från origo till bågen K:s ändpunkter bildar vinklarna α och β med positiva x-axeln, där $0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}$. Låt A vara området mellan bågen K och x-axeln så som i figur 1. Låt B vara motsvarande område mellan bågen K och y-axeln. Visa att talvärdet av summan av arean av A och arean av B är lika stort som talvärdet av längden av bågen K.



Figur 1